Μάθημα 19ο   05/05/2018

Ακτίνα Σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$

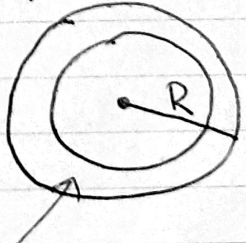
$a \in \mathbb{C}$ κέντρο της δυναμοσειράς
$c_n \subset \mathbb{C}$ συντελεστές της δυναμοσειράς.

$R := \sup\{r \geq 0 : (|c_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ φραγμένη}\}$

$\left[\; 0 \in \{\ldots\}$ αφού $(|c_0|, 0, 0, \ldots) \Rightarrow \{\ldots\} \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{\ldots\} \in [0, +\infty] \;\right]$

επειδή $r \geq 0$

το οποίο σημαίνει ότι $\forall z \in D(a,R)$
η δυναμοσειρά συγκλίνει
και $\forall z \notin \overline{D}(a,R)$ η δυναμοσειρά ΑΠΟΚΛΙΝΕΙ



Εδώ συγκλίνει

$\underbrace{z_0 \in D(a,R)}$
$\Longleftrightarrow |z_0 - a| < R \Rightarrow \exists\, |z_0-a| < r < R \Rightarrow \sum \underbrace{|c_n||z_0-a|^n}_{= \underbrace{|c_n| r^n}_{\leq C} \underbrace{\left(\frac{|z_0-a|}{r}\right)^n}_{<1 \; (*)}}$ $< +\infty$

και για $|z_0-a| > R$ η $|c_n||z_0-a|^n$
δεν είναι φραγμένη $\Rightarrow$ όχι μηδενική
$\Rightarrow \sum c_n (z_0-a)^n$ ΔΕΝ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ

και ο δίσκος $D(a,R)$ ονομάζεται
ΔΙΣΚΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

$(R=0 : D(a,R)=\{a\}$
$R=+\infty : D(a,R) = \mathbb{C}$

Επίσης, από Κριτήριο Λόγου Ρίζας και Σύγκρισης έχουμε:

$$R=\lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (c_n \neq 0)$$

και $$R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

(*) ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ
(γιατί βάζει <1)
$\sum_{0}^{\infty} r^n < +\infty$ για $r \in [0,1)$
και $+\infty$ για $r \geq 1$
(αφού τότε $r^n \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ η (r^n) δεν είναι μηδενική όπως θα έπρεπε για να συγκλίνει η σειρά

Παρατήρηση /

α) Και από τους τρεις χαρακτηρισμούς του R προκύπτει ότι εξαρτάται μόνο από τα (c_n)
ΟΧΙ ΑΠΟ ΤΟ a

β) $(c_n), (b_n) \subset \mathbb{C}$ και οι $\sum c_n(z-a)^n$, $\sum b_n(z-a)^n$
έχουν ακτίνες σύγκλισης R_c, R_b
Τότε αν $|b_n| \leq |c_n| \ \forall n \geq n_0$, τότε $R_c \leq R_b$

(αφού αν για $r \geq 0$ έχουμε $(|c_n| r^n)$ φραγμένη

$\Rightarrow (|b_n| r^n)$ φραγμένη

$\Rightarrow \{r \geq 0 : (|c_n| r^n) \text{ φραγμένη}\} \subset \{r \geq 0 : (|b_n| r^n) \text{ φραγμ.}\}$

$\Rightarrow \underbrace{\sup\{\ldots\}}_{R_c} \leq \underbrace{\sup\{\ldots\}}_{R_b}$.

γ) SOS

Οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$

έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^n ,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1} = \frac{1}{z-a} \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^n} , \quad z \neq a$$

$(n|c_n| r^{n-1})_{n \in \mathbb{N}_0}$ φραγμ.

$\Leftrightarrow \underbrace{(n|c_n| r^n)_{n \in \mathbb{N}}}$ φρ.

$= r (n|c_n| r^{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$

και οι δύο ακτίνες σύγκλισης R'

$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$

και οι δύο ακτίνα σύγκλισης R

Επειδή, $|c_n| \leq n|c_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

απο το (β) έχουμε $R' \leq R$

Όμως αν $R' < R$, τότε θα υπάρχουν

r', r, έτσι ώστε $R' < r' < r < R$

και αφού για $\alpha \in (0,1)$ ισχύει $n\alpha^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (βλ. μετά)

προκύπτει ότι η ακολουθία

$n|c_n|(r')^n = n\underbrace{\left(\frac{r'}{r}\right)}_{\text{έστω}}\underbrace{|c_n| r^n}_{\text{φραγμένη}}$ είναι μηδενική,

δηλαδή φραγμένη $\xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού

$r' > R' = \sup\{\rho \geq 0 : (n|c_n|\rho^n) \text{ φραγμένη}\}$

$\Rightarrow$ δεν ισχύει $R' < R$ ενώ ισχύει $\boxed{R' \leq R}$

$\Rightarrow \boxed{R' = R}$

(«μετά»: $\alpha \in (0,1)$: $\frac{(n+1)\alpha^{n+1}}{n \cdot \alpha^n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\to 1} \alpha \to \alpha \in (0,1)$

$\xRightarrow{\text{κριτ. λόγου}} \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha^n < +\infty \Rightarrow n\alpha^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

(SUPER SOS - II)

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$  $D(a,R)$ και δίσκο σύγκλισης $D(a,R)$. Τότε η συνάρτηση:

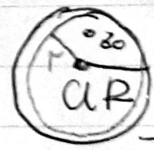
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad z\in D(a,R)$$

είναι (συνεχής και) ολόμορφη και η μιγαδική παράγωγός της είναι:

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z-a)^{n-1}, \quad \forall z\in D(a,R)$$

Απόδειξη

Συνέχεια: Έστω $z_0\in D(a,R)$

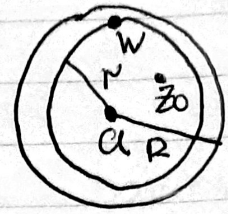


Τότε, σύμφωνα με προηγούμενη πρόταση $\exists\, r\in(|z_0-a|,R)$ έτσι ώστε η δυναμοσειρά $\sum c_n(z-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(a,R)$ και αφού
(f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και f_n συνεχής $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f συνεχής)
έχουμε ότι η $f(z)=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n}_{\lim_{n\to\infty}\underbrace{\sum_{k=0}^{n} c_k(z-a)^k}_{=f_n(z)}}$ είναι συνεχής στο $D(a,r)$

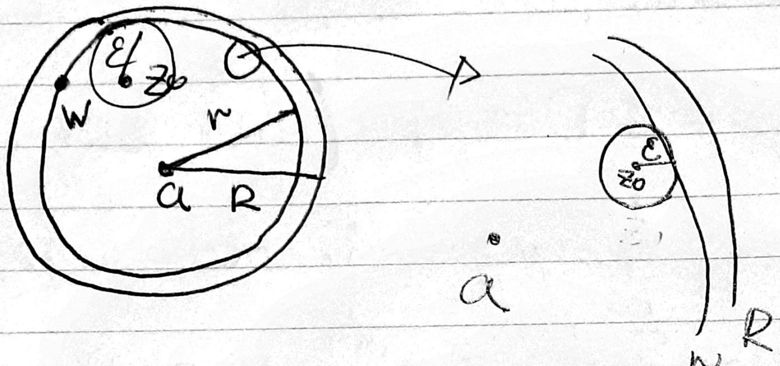
Ολόμορφ.

Έστω $z_0\in D(a,R)$
$\Rightarrow \exists\, r\in(|z_0-a|,R) \Rightarrow z_0\in D(a,r)$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|c_n| \underset{\underset{|w-a|}{\parallel}}{r}^{n-1} < +\infty \quad (1)$$



Έστω $\varepsilon>0$ με $D(z_0,\varepsilon) \subset D(a,r)$



Έχουμε $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(z-a)^n-(z_0-a)^n}{z-z_0}$, $z\in D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$

το οποίο γράφουμε ως $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, g(\underbrace{z-a}_{=w}, \underbrace{z_0-a}_{=w_0}) \quad \text{με}$$

(2) $g(w,w_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} w^k w_0^{n-k-1}$ $\left[\dfrac{w^n-w_0^n}{w-w_0} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} w^k w_0^{n-k-1},\ w\neq w_0 \right.$ (σελ. 2.25) $\Big]$

με $|g(w,w_0)| \le n r^{n-1}$ για $|w|, |w_0| \le r$ και από

το κριτήριο του Weirstrass με $f_n(z) := c_n g(z-a, z_0-a)$

, $z\in\overline{D}(a,r)$

Προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z-a, z_0-a)$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(a,r)$

$\left[\text{έχουμε } \|f_n\| = \sup_{z\in \bar{D}(a,r)} |f_n(z)| \left[\leq |c_n| |g(z-a, z_0-a)| \right] \leq \right.$

$\left. \leq \underbrace{n|c_n| r^{n-1}}_{=M_n} \text{ (βλ. (2)) και } \sum c_n r^{n-1} < +\infty \text{ (βλ. (1))} \right]$

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι συνεχής στο $\bar{D}(a,r)$

$\Longrightarrow \lim_{z\to z_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z-a, z_0-a) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g(z-a, z_0-a) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0-a)^{n-1}$

<u>Παρατήρηση</u>

Έστω $f_n : D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in D$

και $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα και f_n συνεχείς $\forall n \in \mathbb{N}$

Τότε, είπαμε ότι η $f : D \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής.

Αυτό σημαίνει $\underbrace{\lim_{z\to z_0} f(z)}_{= f(z_0)} = \boxed{\lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} f_n(z)}$ (*)

$= f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = \boxed{\lim_{n\to\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z)}$

Για σειρές, αυτό σημαίνει ότι:

$\lim_{z\to z_0} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)}_{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f_k(z)}_{= g_n(z)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z\to z_0} f_n(z) = \lim_{z\to z_0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} f_k$ (*)

$$\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{z\to z_0} \sum_{k=1}^{n-1} f_k(z)}_{= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\lim_{z\to z_0} f_k(z)\right)}$$

$\boxed{\text{ΠΟΡΙΣΜΑ}}$ (του SUPER-SOS-II)

α) Η $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $z\in D(a,R)$ με $R>0$ ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι άπειρες φορές μιγ. διαφ. σε όλο τον δίσκο σύγκλισης $D(a,R)$ και

$$f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} c_n (z-a)^{n-k}, \quad z\in D(a,R)$$

β) Το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης σε δυναμοσειρά κέντρου $a\in\mathbb{C}$ και ακτίνας σύγκλισης $R\in(0,+\infty)$, αν υπάρχει είναι μοναδικό γ) Η f είναι άπειρες φορές $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη

στο $D(a,R)$, $f \in C^{\infty}(D(a,R))$ δηλ.

για $f = u + iv$, $u,v \in D(a,R) \to \mathbb{R}$

f μιγαδική $\Rightarrow$ αν μία φορά μιγ. διαφ.

τότε όσες φορές θέλουμε μιγ. διαφ.

<u>Απόδειξη.</u>

(επαγωγικά από το Super-sos-II).

(α) Δηλ. Είχαμε: Αν $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n}_{= f(z),\ z \in D(a,R)}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ είναι ολόμορφη

με $z \in D(a,R)$ $f'(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}}_{= \sum_{n-1=0}^{\infty} ((n-1)+1) c_{(n-1)+1} (z-a)^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \underbrace{c_{n+1}}_{= c'_n} (z-a)^n$

$\underset{\text{από S-S-II}}{\overset{\text{ξανά}}{\Rightarrow}}$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n (z-a)^n$, έχει ακτ. σύγκλισης $R > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>η f' είναι ολόμορφη</u> και

$f'(z) = f''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c'_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) c_{n+1} (z-a)^{n-1}$

$$= \sum_{n+1=2}^{\infty} ((n+1)-1)(n+1) c_{n+1} (z-a)^{(n+1)-2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{(n-1)n}_{=\frac{n!}{(n-2)!}} c_n (z-a)^{n-2}.$$ Επαγωγικά, προκύπτει το (α)

(β) ειδικότερα $f^{(k)}(a) = \frac{k!}{0!} c_k \underbrace{(z-a)^0}_{=1} =$ ($0! = 1$)

$$= k! \, c_k$$

Δηλαδή: αν έχω μια $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \boxed{(z-a)^n} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z-a)^n \quad \text{για } z \in D(a,R), R>0$$

$\Rightarrow$ τότε $d_n = c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

(γ) f ολόμορφη $\Leftrightarrow$ f - $\mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $D(a,R)$

$f = u + iv$ (και $u_x = v_y$, $v_x = -u_y$)

και $f' = u_x + i v_x = v_y - i u_y$

και αφού (βλ. (α)) f' ολόμορφη $\Rightarrow$

$\Rightarrow f'$ συνεχής $\Rightarrow u_x, v_x, u_y, v_y$ συνεχείς $\Rightarrow$

$\Rightarrow u, v \in C^1(D(a,R))$

Και ακόμα (από το (α)) έχω:

$$f'' = u_{xx} + i v_{xx} = v_{xy} - i u_{xy} = v_{yx} - i u_{yx} =$$

$$= -u_{yy} - i v_{yy}$$

$\Longrightarrow u, v \in C^2(D(a,R))$, ...